Exercice Support d'une mesure

Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On définit le support de la mesure μ comme l'ensemble

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n; \mu(B(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S.

Soit $x \notin S$, alors par définition il existe un $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$, a fortiori pour tout z contenu dans la boule ouverte de centre x et de rayon r_x

$$B(z, r_x - |z-x|) \subset B(x, r_x) \text{ et donc } \mu(B(z, r_x - |z-x|)) = 0$$

ce qui démontre que $B(x, r_x)$ est incluse dans S^c. L'ensemble S est donc fermé. On sait que pour tout $x \notin S$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$. Si K est un compact inclu dans S^c il existe un recouvrement ouvert

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$$

duquel on peut extraire un recouvrement fini (Borel-Lebesgue). De plus S^c peut être vu comme une réunion dénombrable de compacts, par exemple

$$S^c = \bigcup_{n,k} \left\{ x : d(x,S) \geq \frac{1}{k}, |x| \leq n \right\}$$

ainsi S^c est une union dénombrable de boules ouvertes $S^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_{x_i})$ et

$$\mu(S^c) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B(x_i, r_{x_i})) = \sum 0 = 0$$

Si F est un fermé contenu dans S alors

$$\mathbb{R}^n \backslash F = \mathbb{R}^n \backslash S \sqcup S \backslash F$$

et chacun de ces ensembles est mesurable, le résultat s'obtient en prenant la mesure de l'égalité.